

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ НА ТЕМУ ЧИСЛЕННЫХ ЗАДАЧ,  
КАСАЮЩИХСЯ ИЗУЧЕНИЯ ФИГУР РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМ  
ТЕСНОЙ ДВОЙНОЙ ЗВЕЗДЫ\*

ЯЦЕК ОЛЬШЕВСКИ

Существуют данные наблюдений, свидетельствующие о том, что между компонентами тесной двойной звезды может существовать обмен вещества. Теоретически этот вопрос уже обсуждался и до сих пор появилось много связанных с ним работ. Речь идёт здесь о некотором определённом типе систем двойной звезды — это, по терминологии Копала [1] полуразделённая система, то есть такая, в которой одна из звёзд заполняет собой одну из двух замкнутых областей, ограниченных экипотенциальной поверхностью, проходящей через первую точку Лагранжа (предел Роша) рис. 1.

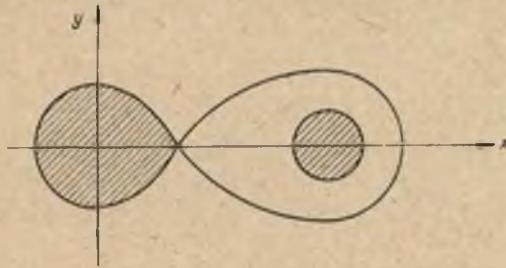


Рис. 1

Если предположим, что такая форма звезды не есть конфигурация равновесия и звезда стремится к увеличению своих размеров, тогда первая точка Лагранжа  $L_1$  станет точкой, из которой станет возможным истечение газа. Скорость элемента массы в этой точке, позволяющая оторваться от поверхности звезды, может получиться из того, что звезда, кроме движения вокруг общего центра масс с вторым компонентом системы (кеплеровское вращение), может обладать ещё собственным вращательным движением, не синхронизированным с кеплеровским вращением. Тогда элемент массы, находящийся на эква-

\* Поступила в редакцию 1. XII. 1963.

торе звезды, будет запущен с точки  $L_1$  со скоростью, зависящей от размеров, формы звезды и степени этого несинхронизма.

О том, что дальше с ним происходит, мы можем узнать лишь посредством численного интегрирования его уравнений движения. Примеры многих вычислений этого типа, осуществлённых с помощью цифровых вычислительных машин, Копаль приводит в своей книге.

В опубликованной недавно работе на эту тему Крушевски [2] ставит ряд вопросов, связанных со случаем, когда нет синхронизма между собственным вращением звезды и кеплеровским вращением системы. Существенно новыми вопросами являются изучение формы звёзд близких к конфигурации полуразделённой в зависимости от степени несинхронизма и влияние асинхронизма на уменьшение критических, т. е. допускающих истечение вещества, размеров звёзд. Однако, оба эти вопроса оказались аналитически нераазрешимыми и потому мы их решаем численными методами. Ввиду того, что они нуждаются в очень большом количестве расчётов, необходимо употребление быстродействующей математической машины.

### 1. Вводные формулировки

Имеем две звезды с известным соотношением масс  $q$ , расстояние между центрами масс этих звёзд принимаем в качестве единицы длины. Предположим, что их форма немногим отличается от сферической и что они уплотнены к центру так, что их гравитационный потенциал будет аппроксимироваться выражением, относящимся к материальным точкам. Кроме того, предположим ещё, что ось вращения большего (в геометрическом смысле) компонента будет перпендикулярной к плоскости кеплеровского вращения системы. Это позволит рассматривать весь вопрос в двух измерениях. Обозначим, следуя за Крушевским, угловую скорость этого вращения следующим образом:

$$(1) \quad \omega = (1+f)\omega_k$$

где  $f$  есть параметр несинхронности,  $\omega_k$  — угловая скорость кеплеровского вращения.

Принятая система координат жёстко связана с двойной системой, ось  $x$  проходит через центры обеих звёзд, ось  $y$  перпендикулярна к ней. Центр системы находится в центре большей звезды. Уравнения движения материальной точки с бесконечно малой массой в поле тяготения двух звёзд принимают вид:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2 \frac{dy}{d\tau} &= \frac{\partial M}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2 \frac{dx}{d\tau} &= \frac{\partial M}{\partial y} \end{aligned}$$

где вместо времени удобнее было ввести независимое переменное  $\tau$ , такое, что

$$(3) \quad \tau = \omega_k t + \text{const}$$

Потенциал  $M$ , производные которого появляются в уравнениях (2) имеет форму:

$$(4) \quad M = \frac{1}{1+q} \cdot \frac{1}{r_1} + \frac{q}{1+q} \cdot \frac{1}{r_2} + \frac{1}{2} \left[ \left( x - \frac{q}{1+q} \right)^2 + y^2 \right]$$

где  $r_1$  — расстояние материальной точки от центра первой звезды,  $r_2$  — от второй. Для того, чтобы можно было начать интегрирование этих уравнений нужны, разумеется, начальные условия, т. е. координаты точки отправления на поверхности звезды и составляющие скорости в этой точке. Вычисление этих величин является здесь наиболее существенной задачей и нуждается в более широком обсуждении.

## 2. Фигуры равновесия

Предположим, что одна из звёзд двойной системы как раз увеличивает свои размеры и рассмотрим, как будут выглядеть очередные конфигурации её поверхности. Поверхность звезды будет всегда поверхностью с одинаковым потенциалом, который, как уже было сказано, аппроксимируется выражением, относящимся к системе двух материальных точек, представляющих звёзды. Форма экви-потенциальной поверхности такой системы точно известна — это кривые Хилла. Для больших значений потенциала они представляют две отдельные, замкнутые области, в форме овалов, окружающих обе материальные точки. Один из них будет поверхностью расширяющейся звезды. Увеличение её поверхности будет рассматриваться как переход от конфигурации с большим потенциалом поверхности к конфигурации с меньшим потенциалом поверхности. Постоянное расширение звезды может привести к конфигурации, для которой значение потенциала её поверхности соответствует кривой Хилла, изображающей две, соприкасающиеся друг с другом в одной точке, области. Это и будет упомянутая уже полуразделённая конфигурация. Для ещё меньших значений потенциала обе области сливаются в одну, заключающую обе материальные точки. В связи с этим нельзя говорить о дальнейшем расширении звезды, так как в момент слияния обеих областей в одну, звезда должна была бы сразу заполнить область так, чтобы её поверхность продолжала оставаться экви-потенциальной поверхностью. Итак, наибольшей возможной конфигурацией является полуразделённая система, и если звезда не достигла таким образом состояния равновесия, то произойдёт истечение вещества из звезды, — точкой истечения будет нейтральная точка  $L_1$ .

Вопрос будет обстоять несколько иначе, если примем во внимание собственное вращение звезды. В этом случае существенным будет факт, что форма звезды отклоняется от сферической. Вернёмся в нашем рассуждении к моменту, в котором звезда не достигла ещё полуразделённой конфигурации. Разницу между овальной формой звезды и поверхностью шара можно рассматривать как деформацию, вызванную наличием второго компонента системы. Если собственное вращение звезды не синхронизовано с кеплеровским вращением системы, то элемент массы, находящийся на её экваторе, будет производить движение по её лучу. В таком случае следует принять во внимание кроме сил, вытекающих из гравитационного потенциала, ещё некоторую силу, которая эти движения вызывает. Будем здесь, по Крушевскому, пользоваться терминами: потенциальное ускорение и кинематическое ускорение. Из существования последнего следует некоторый избыток энергии, каким обладает элемент массы на поверхности звезды. Этот избыток будет вызывать то, что элемент массы будет отрываться от поверхности, прежде чем расширяющаяся звезда достигнет полуразделённой конфигурации. Поэтому следует найти, для каких конфигураций это может иметь место.

При рассуждениях на тему сил, действующих на материальную точку, удобнее принять иную систему координат  $\xi, \eta$ . Её центр находится также в центре большей звезды, но угловая скорость вращения равняется скорости собственного вращения звезды. Координаты  $x$  и  $y$  будут выражаться через иовые:

$$x = \xi \cos f\tau - \eta \sin f\tau$$

$$y = \xi \sin f\tau + \eta \cos f\tau$$

Таким образом имеем систему координат, в которой движение точки, находящейся на экваторе звезды (несферической), можно рассматривать как перемещение по оси  $\xi$ , тогда как  $\eta$  постоянно равняется нулю. Потенциал примет теперь вид:

$$(5) \quad \Omega = \frac{1}{1+q} \cdot \frac{1}{r_1} + \frac{q}{1+q} \left( \frac{1}{r_2} - \xi \cos f\tau \right) + \frac{1}{2} (1+f)^2 \xi^2$$

То же самое, выражение в координатах  $x$  и  $y$ :

$$(6) \quad \Omega = \frac{1}{1+q} \cdot \frac{1}{r_1} + \frac{q}{1+q} \left( \frac{1}{r_2} - x \right) + \frac{1}{2} (1+f)^2 (x^2 + y^2)$$

Нейтральной точкой, аналогичной точке Лагранжа  $L_1$ , будет точка, в которой градиент потенциала равен нулю:

$$(7) \quad \begin{aligned} \Omega_x &= 0 \\ \Omega_y &= 0 \end{aligned}$$

Для точек, расположенных на оси  $x$  второе условие всегда выполняется, стало быть, для определения положения нейтральной точки следует решить лишь одно уравнение  $\Omega_x = 0$  относительно неизвестного  $x$ . Имея координаты нейтральной точки можем вычислить соответствующее ей значение потенциала и, тем самым, определить форму полуразделённой конфигурации.

Потенциальное ускорение имеет вид:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \Omega_\xi$$

Кинематическое ускорение можно вычислить по формуле:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = -\frac{\Omega_{\pi}}{\Omega_\xi} + 2\frac{\Omega_{\tau\xi}\Omega_\tau}{\Omega_\xi^2} - \frac{\Omega_{\xi\xi}\Omega_\tau^2}{\Omega_\xi^3}$$

Следовательно, уравнение:

$$(8) \quad \Omega_\xi = -\frac{\Omega_{\pi}}{\Omega_\xi} + 2\frac{\Omega_{\tau\xi}\Omega_\tau}{\Omega_\xi^2} - \frac{\Omega_{\xi\xi}\Omega_\tau^2}{\Omega_\xi^3}$$

представляет некоторую кривую, вдоль которой выполняется условие отрыва элемента массы от поверхности звезды. Точка пересечения поверхности звезды и этой кривой и есть точка отправления. Теперь предстаёт вопрос, как определить форму наименьшей конфигурации, при которой может уже происходить истечение массы из звезды. Оказывается, что точка, в которой расстояние кривой, представленной уравнением (8), от центра звезды — наименьше, лежит на оси  $x$ . В таком случае эквипотенциальная поверхность, проходящая через неё, будет поверхностью искомой конфигурации и, одновременно, она будет точкой отправления. Уравнение (8) в этом случае примет вид:

$$(9) \quad \Omega_\xi = -\frac{\Omega_{\pi}}{\Omega_\xi}$$

так как для точек, расположенных на оси  $x$ ,  $\tau = 0$ , а в связи с этим:

$$\Omega_{\tau\xi} = \Omega_\tau = \Omega_{\xi\xi} = 0$$

Обозначим решение уравнения (9) через  $\xi_0$ , положение точки аналогичной точке Лагранжа через  $\xi_1$ . Значения  $\Omega(\xi_0, 0)$  и  $\Omega(\xi_1, 0)$  определяют интервал от наименьшей до наибольшей конфигурации, при которой может происходить истечение массы — при наших предположениях о равновесии. Элемент массы, оторвавшийся от поверхности звезды, может через некоторое время упасть на неё обратно, может присоединиться ко второй звезде или же вообще покинуть систему. Задача теперь сводится к тому, чтобы найти конфигурацию, допускающую не только истечение, но и переход массы на вторую звезду или бегство в межзвёздное пространство. С этой целью следует ин-

тервал  $\Omega(\xi_0, 0) - \Omega(\xi_1, 0)$  разбить на несколько меньших, затем, начиная с конфигурации, имеющей потенциал поверхности  $\Omega(\xi_0, 0)$ , исследовать траектории материальных точек до момента, когда при определённом значении потенциала получим траекторию, ведущую на вторую звезду или вовне системы. Изучение дальнейших конфигураций бесполезно, так как звезда не может их достигнуть вследствие потери массы.

Первый этап расчётов состоит в вычислении величин  $\xi_1$  и  $\xi_0$ . Это решения уравнений (7) и (8), причём  $\tau$  равно нулю; принятый метод решения есть метод линейной интерполяции (regula falsi):

$$\xi = a - f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

где  $a$  и  $b$  — очередные приближения решения.

Для уравнения (7) принятые следующие приближения: нулевое: координата первой точки Лагранжа  $l_1$ , первое:  $l_1 - 0,1 \times l_1$ . Для уравнения (9): нулевое: значение  $\xi_1$ , первое:  $\xi_1 - 0,1 \times \xi_1$ . В обоих случаях решение было признано достаточно точным, когда  $|f(\xi)|$  стало меньше  $5 \times 10^{-7}$ .

Отрезок  $\xi_0, \xi_1$  представляет собой геометрическое место точек, в которых пересекаются с осью  $x$  поверхности всех конфигураций, допускающих истечение массы. Исследование, теряет ли звезда массу — будем проводить для конфигураций с потенциалами поверхности:

$$\Omega\left(\xi_0 + k \frac{\xi_1 - \xi_0}{10}, 0\right)$$

где  $k$  будет порядковым номером конфигурации и пробегает значения  $0, 1, 2, \dots, 10$ . Если окажется, что для  $k = k_i$  констатируется потеря массы, то будем ещё рассматривать случаи  $k = k_i - 0.5$  и  $k = k_i - 0.25$  или  $k = k_i - 0.75$ . Для установленного значения потенциала поверхности следует вычислить координаты точки, из которой истекает вещества. Для наименьшей конфигурации дело обстоит просто, так как мы обладаем уже координатами этой точки (см. выше — решение уравнения (9)):

$$x = \xi_0$$

$$y = 0$$

Относительно больших конфигураций — надо решить систему двух уравнений с двумя неизвестными  $\xi$  и  $\tau$ :

$$(10) \quad -\Omega_\xi - \frac{\Omega_{\tau\tau}}{\Omega_\xi} + 2 \frac{\Omega_{\tau\xi}\Omega_\tau}{\Omega_\xi^2} - \frac{\Omega_{\xi\xi}\Omega_\tau^2}{\Omega_\xi^3} = 0$$

$$(11) \quad \Omega(\xi, \tau) - \Omega\left(\xi_0 + k \frac{\xi_1 - \xi_0}{10}, 0\right) = 0$$

Второе уравнение есть уравнение эквипотенциальной поверхности, проходящей через точку  $\left(\xi_0 + k \frac{\xi_1 - \xi_0}{10}, 0\right)$ , а значит, оно то же уравнение поверхности звезды. Система должна иметь два решения, которые отличаются знаком  $\tau$ , то есть, они расположены симметрически относительно оси  $x$ . Выбрать следует то, для которого  $\tau$  отрицательно, так как отрыв элемента массы от поверхности звезды должен произойти до перехода через ось  $x$  (для точек, лежащих на оси  $x$ ,  $\tau = 0$ ). Для удобства, неизвестному будем считать произведение  $f\tau$ , которое представляет угловое расстояние рассматриваемой точки на поверхности звезды от оси  $x$ .

Вначале к решению этой системы уравнений пытались применить метод линейной интерполяции следующим образом:

Каждое из вышеупомянутых уравнений рассматривается как уравнение с одним неизвестным; уравнение (10) решается относительно  $f\tau$ , а (11) относительно  $\xi$ . Значение  $\xi$  в уравнении (10) есть решение уравнения (11), значение  $f\tau$  в уравнении (11) есть последнее полученное решение уравнения (10). Для того, чтобы можно было начать процесс решения следует для уравнения (10) принять некоторое значение  $\xi$  как нулевое приближение; принималось значение  $\xi_0$ . Решение оканчивалось в момент, когда разницы между последовательно получаемыми значениями  $f\tau$  и значениями  $\xi$  становились очень малыми. Однако оказалось, что этот метод во многих случаях не даёт решения. Напомним, что уравнение (11) есть уравнение эквипотенциальной поверхности и представляет кривую Хилла, состоящую из двух частей, причём только одна из них есть поверхность звезды. Для небольших угловых расстояний от оси  $x$  ( $f\tau$ ) обе части кривой очень близки друг к другу. Точки, получаемые поочерёдно путём решения уравнения (10), в общем случае не будут лежать на поверхности звезды, а только поблизости исё. Для небольших  $f\tau$  они будут также поблизости второй части кривой Хилла и в нескольких случаях оказалось, что следующее, очередное решение уравнения (11) дало в результате значение, соответствующее именно второй части кривой Хилла. В таком случае дальнейшие расчёты не могут привести к решению.

Поэтому следовало применить метод, в котором очередными приближениями являются только точки, лежащие на поверхности звезды, т. е. их координаты должны всегда удовлетворять уравнению (11). Из этого следует, что (10) нельзя рассматривать буквально как уравнение иначе говоря — мы не будем его решать, а будем лишь проверять, какие знаки принимает его левая часть (обозначим её через  $V(\xi, f\tau)$ ), вычисляемая для различных точек поверхности звезды. Если найдём две таких точки  $(\xi_{n-1}, f\tau_{n-1})$ , и  $(\xi_n, f\tau_n)$ , для которых  $V(\xi_{n-1}, f\tau_{n-1}) \cdot V(\xi_n, f\tau_n) < 0$ , то это будет означать, что решение ле-

жит между ними. В таком случае следует вычислить значение выражения  $V(\xi_{n+1}, f\tau_{n+1})$ , где  $f\tau_{n+1} = \frac{1}{2}(f\tau_n + f\tau_{n-1})$ , а  $\xi_{n+1}$  вычислено из уравнения (11), в которое предварительно было вставлено значение  $f\tau = f\tau_{n+1}$ . Решение этого уравнения производится таким же методом, как при уравнениях (7) и (9). Затем следует проверить, какими знаками обладают выражения  $V(\xi_n, f\tau_n) \cdot V(\xi_{n+1}, f\tau_{n+1})$  и  $V(\xi_{n-1}, f\tau_{n-1}) \times V(\xi_{n+1}, f\tau_{n+1})$ . Одно из них должно быть отрицательно.

Повторяя изложенное выше рассуждение для точек всё более близких друг друга подойдём, наконец, к ситуации, когда разница между очередными  $f\tau_{n-1}$  и  $f\tau_n$  станет очень малой. Мы можем тогда признать, что система уравнений решена. Точность решения была принята следующая:  $|f\tau_{n-1} - f\tau_n| < 10^{-7}$ , причём  $f\tau$  должны быть выражены в радианах.

Имея положение точки направления в координатах  $\xi$  и  $\tau$ , можем перейти к системе  $xy$ :

$$x = \xi \cos f\tau$$

$$y = \xi \sin f\tau$$

Скоростью элемента массы в этой точке — в системе  $xy$  — является скорость, вытекающая из собственного вращения звезды:

$$(12) \quad \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{d\tau} = -\frac{\Omega_r}{\Omega_t} \cos f\tau - \xi f \sin f\tau \\ v_y &= \frac{dy}{d\tau} = -\frac{\Omega_r}{\Omega_t} \sin f\tau + \xi f \cos f\tau \end{aligned}$$

Теперь мы можем начать интегрирование уравнений движения частицы и таким образом ответить на вопрос, что с нею далее происходит.

Несколько иначе будет обстоять дело с вычислением начальных условий в случае, когда потребуется изыскание наибольшей полуразделённой конфигурации. Точной направления для такой конфигурации будет, как это следует из изложенных раньше рассуждений, нейтральная точка, аналогичная точке Лагранжа:

$$x = \xi_1$$

$$y = 0$$

Формулы (12), определяющие составляющие начальной скорости в предыдущих случаях, здесь непригодны. Скорость как вектор — в нейтральной точке разрывная, поэтому мы должны принимать во внимание скорость, какой обладает элемент массы на поверхности звезды тут же перед достижением нейтральной точки. Составляющие этой скорости будут выглядеть следующим образом:

$$v_x = \xi_1 |f| \sqrt{\frac{1-\theta}{2+\theta}}$$

где:

$$\Theta = \frac{(1+f)^2(1+q)}{\xi_1^{-3} + q(1-\xi_1)^{-3}}$$

$$v_y = \xi_1 \cdot f$$

Интегрирование уравнений движения материальной точки (2) ведётся методом Рунге-Кутта-Гилла. Точность вычислений проверяется формулой, известной под названием интеграла Якоби:

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 \right] = M - C$$

Его пригодность для этой цели состоит в том, что величина  $C$  при точных вычислениях сохраняла бы постоянное значение. Таким образом, изменения значения  $C$  вдоль всей траектории информируют нас о допускаемых нами ошибках интегрирования уравнений (2). Принятый шаг интегрирования  $h$  зависит от отношения масс звёзд  $q$  и от величины  $r_1$  и  $r_2$ :

$$(13) \quad h = \frac{\pi}{200} \cdot j \cdot \frac{(r_2 q + r_1) r_2}{(r_2^* q + r_1^*) r_2^*}$$

где  $r_1^*$  и  $r_2^*$  — значения  $r_1$  и  $r_2$  в точке отправления,  $j$  — некоторая постоянная, посредством которой мы можем определять величину начального шага. Если положить  $j = 1$ , тогда он будет равняться  $\frac{\pi}{200}$ .

(13) есть полуэмпирическая формула, принятая на основании отклонений постоянной  $C$  в интервале Якоби, вычисляемой вдоль многих траекторий, полученных численным способом, от постоянной, вычисленной для точек отправления. Формула длины шага (13) учитывает два следующих фактора:

1. если материальная точка приближается к какой-либо из звёзд, шаг должен уменьшаться;

2. в следствии принятия врачающейся системы координат, в которой интегрируются уравнения, скорость точки по мере возрастания расстояния от начала системы увеличивается; следовательно, если точка приближается к второй звезде (удаляется от начала системы), шаг должен уменьшаться быстрее, чем это приходит во время сближения к первой звезде. Указанный выше метод определения длины шага даёт удовлетворительные результаты до тех пор, пока  $r_1$  и  $r_2$  не становятся больше 1. Тогда шаг становится слишком большим. Во избежание этого было установлено условие, что его длина не может превышать пятикратного начального значения.

Принятые уравнения (2) точно описывают движение частицы при предположении, что мы имеем дело с классической *problème*

*restraint* [3], что не выполняется точно, ибо поверхность звезды не является точно поверхностью шара; об одной из них знаем, что она овальная, кроме того — размеры звёзд конечны. В связи с этим даже наиболее точные методы интегрирования дифференциальных уравнений дадут нам лишь приближённое изображение траектории материальной точки. Различие между полем тяготения действительных звёзд и полем тяготения двух материальных точек можно рассматривать как внесение каких-то возмущений в движение описанное уравнениями (2). Точки отправления находятся всегда в местах, принадлежащих к наиболее деформированным частям звезды, следовательно, движение молекулы на первом участке её траектории, проходящей вблизи „вершины“ звезды, должно подвергаться наибольшим возмущениям. Теперь возникает вопрос, как и какие возмущения следует ввести в движение материальной точки. Легче всего ввести некоторые небольшие изменения в начальные условия и наблюдать последствия этого. Это может нам дать некоторое представление о том, как велики ошибки, вызванные предположением, что звёзды можно рассматривать как материальные точки. Положение точки отправления не будем менять потому, что расположение и форма первого участка траектории повидимому немногим отличается от действительного, но существенными могут быть различия между скоростями, каких молекула достигает в действительном движении и в движении, представленном уравнениями (2). Поэтому мы будем вводить изменения в составляющие начальной скорости и проверять, не вызывает ли это качественного изменения всего процесса, иначе говоря, не присоединится ли элемент массы к другой звезде. Это весьма важно, особенно для соседних конфигураций, одна из которых ещё не допускает истечения массы, а вторая уже допускает. Поэтому мы всегда исследуем траекторию материальной точки для этой первой конфигурации, с увеличенными по абсолютному значению составляющими начальной скорости:

$$v_x + 0,05v_x, \quad v_y + 0,05v_y.$$

Если такая траектория оканчивается на второй звезде, то производим расчёты ещё для двух случаев:

$$\begin{aligned} &v_x + 0,05v_x, \quad v_y + 0,025v_y \\ &v_x + 0,025v_x, \quad v_y + 0,05v_y \end{aligned}$$

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Z. Kopal, *Close Binary Systems*. John Wiley Sons Inc., New York 1959.
- [2] A. Kruszewski, *Acta Astr.* **13** N 2 (1963).
- [3] D. Brauwer, G. M. Clemence, *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press, New York and London 1961.